



Profesores: Felipe Caro, Patricio Conca, Andrés Musalem, Gabriel Weintraub

Auxiliares: Fabiola Araya, Marcel Goic, Ricardo Montoya, Juan Pablo Troncoso

Tiempo: 3 horas

I

Considere una metrópolis moderna que tiene **I** cuadras y **N** colegios. Su sistema educacional tiene doce niveles o años en total: 8 de educación básica y 4 de educación media. Los **N** colegios no tienen todos los mismos niveles, o sea, no todos van de primero básico a cuarto medio. Por regla general de la ciudad todos los alumnos que viven en la misma cuadra del mismo año deben ir CAMINANDO al mismo colegio. Actualmente se tiene una distribución cuadras-colegios dada pero se desea hacer una reasignación de tal manera que la distancia caminada por el total de alumnos sea mínima.

Los apoderados de los alumnos exigen que al menos un 70% de ellos siga en su colegio actual. Además piden que si los alumnos del año **k** de la cuadra **i** van al colegio **n**, entonces los alumnos de la cuadra **i** que están en el año **k+1**, también deben ir al colegio **n** (obviamente, sólo si el colegio **n** llega hasta el nivel **k+1**). Por su lado, los profesores exigen que ningún nivel (en ningún colegio) quede sobre poblado de alumnos.

Formule un modelo de optimización lineal binario que reasigne los alumnos de acuerdo a los criterios anteriores. Asuma los siguientes datos como conocidos:

- La distribución cuadras-colegio actual, En otras palabras, el siguiente subconjunto de índices es conocido $ACT = \{(i,k,n) / \text{los alumnos del año } k \text{ de la cuadra } i \text{ actualmente van al colegio } n\}$.
- CAP_{kn} , el número de alumnos del nivel **k** que “cabén” en el colegio **n** ($CAP_{kn} = 0$ significa que el colegio **n** no ofrece el curso o nivel **k**).
- $DIST_{in}$, distancia (en metros caminados) desde la cuadra **i** al colegio **n**.
- STD_{ik} , número de alumnos del nivel **k** que viven en la cuadra **i**.

II

- a) Se sabe que en una iteración cualquiera la variable x_s ingresará a la base y se conocen los coeficientes $\bar{a}_{i,s} \quad \forall i$. Se sabe además que x_r es variable básica. Explique qué situación se debe presentar para que x_r no cambie de valor al efectuarse la iteración.
- b) Suponga que se ha resuelto un problema de programación lineal, siendo su solución óptima única. Explique cómo se puede obtener, a partir de la solución óptima, la solución básica factible con valor de la función objetivo más próxima al valor óptimo de ella.

- c) Suponga que se da una forma canónica en la cual existe 1 valor del lado derecho negativo.
Se pide obtener, mediante una iteración, otra forma canónica que entregue una solución básica factible. Explique claramente cómo se debe seleccionar la variable que ingresa a la base y cómo se determina la variable que sale.

Indique las condiciones que se deben dar para que sea posible lo anterior.

- d) Justifique o rechace la siguiente afirmación: “Toda solución factible de un problema de programación lineal es solución óptima del problema de FASE 1”.

III

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll}\text{Max } z = & x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_3 \leq 2 \\ & x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_3 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i=1..3\end{array}$$

- a) (1 pto.) Transforme este problema llevándolo a la forma estándar.
- b) (2 pts) Aplicando Fase I, determine una solución básica factible inicial.
Hint: Note que no es necesario incluir tres variables auxiliares
- c) (2 pts) Resuelva el problema de optimización original (Fase II) mediante el simplex. En cada iteración especifique cuáles son las variables básicas, las variables no básicas, la variable que entra y la variable que sale. Además especifique el valor de cada una de las variables básicas y el valor de la función objetivo en cada iteración.
- d) (1 pto) Indique qué características presenta esta solución óptima:
- i) ¿Es el problema no acotado?
 - ii) ¿Existen óptimos alternativos?
 - iii) ¿Existen restricciones redundantes?
 - iv) ¿Es la solución óptima degenerada?

Reclamo Control 2: Viernes 26 de mayo de 13:30 a 14:30 en el Hall Sur.

Notas y avisos de IN34A se encuentran en la página web del curso:

www.dii.uchile.cl/~in34a

PAUTA PREG. DE MODELAMIENTO:

i) var. de decisión (1,0 pto)

$$X_{ikn} = \begin{cases} 1 & \text{si los alumnos del nivel } k \text{ de la} \\ & \text{cuadra } i \text{ son asignados al colegio } n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

ii) restricciones (0,8 pto %)

- Los alumnos de cada nivel en cada cuadra deben ser asignados a un solo colegio

$$\sum_{n=1}^N X_{ikn} = 1 \quad \forall i=1, \dots, I, k=1, \dots, 12$$

- Los alumnos asignados a cada nivel de cada colegio no deben exceder la capacidad disponible

$$\sum_{i=1}^I X_{ikn} \cdot STD_{ik} \leq CAP_{kn} \quad \begin{matrix} \forall k=1, \dots, 12 \\ \forall n=1, \dots, N \end{matrix}$$

- Si los alumnos del nivel k de una cuadra dada i son asignados al colegio n , entonces los alumnos del nivel $k+1$ (de la misma cuadra) tb. deben ir al colegio n (SOLO SI el colegio n llega hasta el nivel $k+1$)

$$X_{ikn} \leq X_{i(k+1)n} \quad \begin{matrix} \forall i=1, \dots, I \\ \forall k, n \text{ tq. } CAP_{kn} \neq 0 \wedge \\ CAP_{(k+1)n} \neq 0 \end{matrix}$$

- Al menos un 70% de los alumnos debe seguir en el mismo colegio donde se encuentra actuali.

Sea $ACT = \{(i, k, n) / \text{actuali. los alumnos del nivel } k \text{ del bloque } i \text{ van al colegio } n\}$

$$\sum_{(i, k, n) \in ACT} STD_{ik} X_{ikn} \geq 0,7 \cdot \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{12} STD_{ik}$$

- Naturaleza de las variables

$$X_{ikn} \in \{0, 1\} \quad \forall i=1, \dots, I, \forall k=1, \dots, 12, \forall n=1, \dots, N$$

iii) función objetivo (1,0 pto)

La idea es minimizar la distancia caminada por el total de alumnos. Luego se desea minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{12} \sum_{n=1}^N STD_{ik} \cdot DIST_{in} \cdot X_{ikn}$$

- Naturaleza de las variables

$$X_{ikn} \in \{0,1\} \quad \forall i=1,\dots,I, \forall k=1,\dots,12, \forall n=1,\dots,N$$

iii) función objetivo (1,0 pto)

La idea es minimizar la distancia caminada por el total de alumnos. Luego se desea minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{12} \sum_{n=1}^N STD_{ik} \cdot DIST_{in} \cdot X_{ikn}$$

SOLUCION PREGUNTA C#2.

- a) Sin perder generalidad, suponga que la variable x_r se obtiene de la k -ésima restricción.

Para que x_r no cambie de valor al ingresar x_s a la base, se debe tener:

$$\bar{a}_{k,s} = 0.$$

- b) Suponga que x_j es variable no básica en la solución óptima.

Si x_j ingresara a la base debería tomar el valor:

$$\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,j}} ; \bar{a}_{i,j} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{p,j}}$$

Sea $\bar{c}_j^* > 0$ el costo modificado o reducido de x_j en la última forma canónica.

Luego al ingresar x_j a la base, la función objetivo aumentará en:

$$\bar{c}_j^* \cdot \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{p,j}} \quad (1).$$

Para toda variable no básica se debe obtener el resultado (1). El menor de estos resultados determinará la variable que ingresará a la base.

La variable que sale de la base se determina con el procedimiento habitual.

del algoritmo simplex.

Al ejecutar la iteración se obtendrá la solución básica factible pedida.

c) Sea x_f la variable básica negativa y supongamos que se obtiene de la k -ésima restricción.

En primer lugar, se debe verificar la existencia de $\bar{a}_{k,p} < 0$. En otro caso si x_p crece, también crecerá x_f .

El máximo valor que puede tomar x_p está dado por:

$$\text{Mini} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,p}} ; \bar{a}_{i,p} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r,p}} \quad (1)$$

Si x_p toma el valor $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r,p}}$ digamos la base

la variable básica que se obtiene de la r -ésima restricción.

El crecimiento de x_p deberá ser tal que asegure que x_f sea no-negativa. Esto se logra si:

$$\frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{k,p}} \leq \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r,p}}$$

En resumen, la variable que ingresa a la base se elige de tal manera que cumpla con:

$$i) \quad \bar{a}_{k,p} < 0$$

$$ii) \quad \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{k,p}} \leq \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r,p}}$$

La variable que sale es la básica de la próxima ecuación.

Para que en 1 iteración se pueda eliminar la infactibilidad debe cumplirse i) y ii)

- Nota:
- Puede haber mas de una variable que cumpla i) y ii)
 - Si $\frac{\overline{b_k}}{a_{k,p}} > \frac{\overline{b_n}}{a_{np}}$ se obtiene una solución básica degenerada y factible.

d) La afirmación es correcta.

Toda solución factible cumple el sistema de ecuaciones de la forma estándar.

Si al sistema anterior se le agregan las variables artificiales, todas ellas deberán tomar el valor 0. Luego la función auxiliar tendrá valor 0. Por tanto debe ser solución óptima de la FASE 1.

a) Forma Estándar

$$\text{Min } -z = -x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_2 + x_3 + x_5 = 2$$

$$x_3 - x_6 = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1, \dots, 6$$

b) Fase I:

$$\text{Min } t_1 + t_2 + t_3$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_3 + x_4 + t_1 = 2$$

$$x_2 + x_3 + x_5 + t_2 = 2$$

$$x_3 - x_6 + t_3 = 1$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0 \quad t_1, \dots, t_3 \geq 0.$$

Si bien se puede resolver este problema considerando como variables básicas t_1, t_2, t_3 es más práctico resolver el siguiente problema:

$$\text{Min } t_1$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_2 + x_3 + x_5 = 2$$

$$x_3 - x_6 + t_1 = 1$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0 \quad t_1 \geq 0.$$

Este problema puede ser resuelto matricialmente o mediante tableau (formas canónicas)

Variables básicas: (x_4, x_5, t_1) Variables No Básicas: (x_1, x_2, x_3, x_6)

$$B_1 = [A_{\cdot 4} \ A_{\cdot 5} \ A_{\cdot 7}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ t_1 \end{pmatrix} = B_1^{-1} b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_R = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w = 1$$

Optimalidad?

$$\pi = C_B \cdot B_1^{-1} = C_B \cdot I_3^{-1} = C_B = (0, 0, 1)$$

$$\bar{C}_R = C_R - \pi \cdot R = (0, 0, 0, 0) - (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (0, 0, -1, 1)$$

↑
 x_3 * Soln. actual no es óptimo. ($\exists \bar{C}_R < 0$)* Según criterio de entrada, debe entrar x_3 a la Base.

* Criterio de Salida.

$$\bar{A}_{\cdot 3} = B^{-1} A_{\cdot 3} = A_{\cdot 3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\min_{\bar{a}_{i3} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{1} \right\} = \frac{1}{1} = \frac{\bar{b}_3}{\bar{a}_{33}}$$

Sale 3° Var. básica:
 t_1

Nueva Solución básica factible:

$$B_2 = [A_{\cdot 4} \ A_{\cdot 5} \ A_{\cdot 3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} = B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_R = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

 $w = 0 \Rightarrow$ Óptimo.
Solución Fase I es
factible para Problema
Original

c) El problema corresponde a:

$$\text{Min } -z = -x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + x_3 + x_4 & = 2 \\ x_2 & + x_3 & + x_5 = 2 \\ & x_3 & - x_6 = 1 \end{array}$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1 \dots 6.$$

De acuerdo a la parte b)

$B_1 = [A_{\cdot 4} \ A_{\cdot 5} \ A_{\cdot 3}]$ es una base que genera una solución

básica factible:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{b} \quad x_R = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-z = -3 \cdot 1 = -3$$

• Optimicidad?

$$\pi = c_B \cdot B_1^{-1} = (0, 0, -3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ -3)$$

$$\bar{c}_R = c_R - \pi R = (-1, -1, 0) - (0, 0, -3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1, -1, -3)$$

\downarrow
 x_6

• Entra x_6 // (Solución actual no es óptima, pues $\bar{c}_R \leq 0$)

• Criterio de Solids: $\bar{A} \cdot b = B_1^{-1} A \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\text{Min}_{\bar{a}_{i6} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i6}} \right\} = \text{Min} \left\{ \frac{1}{1} ; \frac{1}{1} \right\} = 1 = \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{16}} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{26}}$$

\swarrow \searrow
 x_4 x_5

Hay empate en el criterio de Solado \Rightarrow habrá degeneración.

Escojamos x_4 como variable básica que sale.

$$B_2 = \begin{bmatrix} A_{.6} & A_{.5} & A_{.3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} = B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Solución degenerada } (x_5 = 0).$$
$$x_R = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -Z = -6$$

• Optimalidad

$$\pi = C_B \cdot B_2^{-1} = (0, 0, -3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-3, 0, 0)$$

$$\bar{C}_R = (-1, -1, 0) - (-3, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2, -1, 3)$$

\downarrow
 x_2

• De acuerdo a esto x_2 entra.

• Sale?

$$\bar{A}_{.2} = B^{-1} A_{.2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\min_{\bar{a}_{i2} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} = \min \left\{ \frac{0}{1} \right\} = 0 = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}} \rightarrow \text{Sale } x_5.$$

En Realidad x_2 no puede aumentar

Será el mismo vértice.

$$\bullet B_3 = [A_6 \ A_2 \ A_3]$$

$$B_3 \text{ coincide con } B_2 \Rightarrow B_3 = B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = (x_6, x_2, x_3)^t = (1, 0, 2)^t \quad x_R = (x_1, x_4, x_5)$$

Optimalidad:

$$\pi = C_B \cdot B_3^{-1} = (0, -1, -3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-2, -1, 0)$$

$$\bar{C}_R = (-1, 0, 0) - (-2, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 0, 0) + (2, 2, 1) = (1, 2, 1)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_4 & x_5 \end{matrix}$

\Rightarrow Solu. actual es óptima $\bar{C}_R \geq 0$.

(Nota: En la iteración 2, podría haber sido posible escoger x_5 como variable básica que sale.

$$B_2' = [A_4 \ A_6 \ A_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2'^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_B = (x_4, x_6, x_3) &= B_2'^{-1} b = (0, 1, 2)^t \\ x_R = (x_1, x_2, x_5) &= (0, 0, 0)^t \\ -Z &= -6 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Mismo Vértice que el} \\ \text{de las Iteraciones} \\ 2 \text{ y } 3 \text{ anteriores.} \\ \text{Es degenerado } (x_4 = 0). \end{array} \right.$$

$$\pi = (0, 0, -3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, -3, 0)$$

$$\bar{C}_R = (-1, -1, 0) - (0, -3, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 2, 3)$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ x_1 \end{matrix}$

Entro x_1

Salida?

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{11}} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \text{Sale Variable B\'asica } x_4.$$

Pero $x_4 = 0 \Rightarrow$ Habr\'a cambio de Base pero se permanecer\'a en el mismo v\'ertice.

$$B'_3 = [A_{\cdot 1} \ A_{\cdot 6} \ A_{\cdot 3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B_3^{-1} b = (0, 1, 2)^T = (x_1, x_6, x_3)^T$$

$$x_R = (0, 0, 0)^T = (x_2, x_4, x_5)$$

$$-z = -6$$

Optimalidad?

$$\pi = (-1, 0, -3) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \ -2 \ 0]$$

$$\bar{c}_R = (-3, 0, 0) - (-1, -2, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 2)$$

Soluci\'on actual es \'optimo.

- d) - El Problema es acotado pues $-z^* = -6 \Leftrightarrow z^* = 6$
- No Existen restricciones redundantes, de otra manera esto se hubiese detectado en la Fase I. En todo caso, ninguna restricci\'on es una combinaci\'on lineal de las otras.
 - La Soluci\'on \'optima es degenerada, pues el v\'ertice \'optimo con cualquiera de sus bases (B_2, B_3, B'_2, B'_3) posee una variable b\'asica = 0.
 - No existen m\'ultiples soluciones \'optimas, pues $\bar{c}_3 > 0$ en el \'optimo. (Mayor Estricto)